**Universidad Nacional de General Sarmiento**
**Instituto del Desarrollo Humano**

# El concepto de límite: dificultades de comprensión que persisten luego de la enseñanza

Vilma L. Colombano

# Antecedentes

- Observar que los estudiantes asocian la búsqueda del límite con la manipulación de registros numérico (Tablas de valores) y gráfico.
- Asociar el valor del límite con la imagen de la función en el punto de estudio.
- Trasladar a la obtención de un límite el mecanismo que usan para graficar funciones.
- En la definición formal hay términos y símbolos que no logran entender, en consecuencia no la usan.

## Modelo propio de la noción

Le permite resolver gran parte de las actividades propuestas por el docente

No usa la definición formal de límite

# Caracterización de dificultades

Análisis dinámico

Tabla de valores

Hallar el valor del límite por simple sustitución en la función de valores de x cercanos al punto de acumulación

Análisis estático

Hallar el valor del límite por simple sustitución del valor de x considerado para el análisis en la expresión de la función

# Actividades que fomentan la idea propia de la noción

- Resolver límites indeterminados
- Hallar el límite de funciones ampliamente trabajadas por el alumno teniendo como dato la expresión de la función
- Hallar el límite de funciones expresadas mediante su gráfica

# Actividades tendientes a desestabilizar la idea propia de la noción: Actividad 1

$$Dada\,f : \Re - \{0\} \rightarrow \Re \,/\, f(x) = x + 1 + \frac{1}{100000\,x}$$

a) Determinar el límite de *f* cuando *x* tiende a 0.

b) Completar la siguiente tabla.

| x | f(x) |
|---|---|
| 0.1 | |
| 0,01 | |
| 0.001 | |
| -0.1 | |
| -0.01 | |
| -0.001 | |

# Posible resolución

Punto a) por análisis estático el límite es ∞

Punto b) por análisis dinámico surge de lo que muestra la tabla que el límite podría ser 1.

| x | f(x) |
| --- | --- |
| 0.1 | 1.1001 |
| 0,01 | 1.011 |
| 0.001 | 1.011 |
| -0.1 | 0.899 |
| -0.01 | 0.989 |
| -0.001 | 0.989 |

# Discusión

- No resulta sencillo anticipar el gráfico de la función
- El análisis estático resulta más eficaz al momento de dar una respuesta a la actividad
- La tabla de valores no otorga garantía con pocos valores de x cercanos al punto de estudio

# Actividad 2

Dado el siguiente límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{-33\sqrt[3]{x}+33}{10x-10}$ se pide

a) Proponer un valor para el límite

b) Indicar qué procedimiento realizó para responder al ítem a)

<u>Características de la actividad</u>

- Presenta un caso de indeterminación ampliamente conocido. No sirve el análisis estático
- No resulta sencillo anticipar el tipo de gráfico que corresponde a la función
- El recurso más viable puede ser la tabla de valores

# Posible resolución

- Tabla de valores

| x | F(x) |
|---|---|
| 0.9 | -1.138850 |
| 0.99 | -1.103687 |
| 0.999 | -1.100366 |
| 1.01 | -1.096353 |
| 1.001 | -1.099633 |
| 1.0001 | -1.099963 |

# Discusión

- Puede arriesgarse que el límite sea -1 cuando en realidad es -1.1
- Nuevamente la tabla con una cantidad finita de valores no es garantía aún cuando el estudiante tiene la posibilidad de proponer la cantidad de valores de x  que quiera y tan cerca del número 1 como desee

# Actividad 3: no se presenta la expresión de la función

A Pedro se le presentó una función $f:\Re \rightarrow \Re$ y se le pidió calcular el límite de *f* cuando x tiende a cero. Él propuso números cercanos a cero por izquierda y por derecha y construyó la siguiente tabla.¿Qué podrías afirmar sobre el límite de la función *f* cuando x tiende a cero, si se sigue la misma tendencia y forma de completar la tabla?

| x | f(x) |
|---|---|
| -0.1 | 0.9 |
| -0.01 | 0.99 |
| -0.001 | 0.999 |
| -0.0001 | 0.9999 |
| -0.00001 | 0.99999 |
| -0.000001 | 0.999999 |

| x | f(x) |
|---|---|
| 0.1 | 1.1 |
| 0.01 | 1.01 |
| 0.001 | 1.001 |
| 0.0001 | 1.0001 |
| 0.00001 | 1.00001 |
| 0.000001 | 1.000001 |

# Discusión

- ¿Cuántos valores se pueden agregar a la tabla dada?
- ¿Qué garantiza que la imagen de función se acerca a 1?
- ¿Existe la posibilidad de que tomando valores de x cada vez más cercanos a cero la función cambie la tendencia que muestra la tabla?

# Posible ejemplo

| x | f(x) |
|---|---|
| -0.1 | 0.9 |
| -0.01 | 0.99 |
| -0.001 | 0.999 |
| -0.0001 | 0.9999 |
| -0.00001 | 0.99999 |
| -0.000001 | 0.999999 |
| -0.11 | 3 |
| -0.011 | 3 |
| -0.0011 | 3 |
| -0.00011 | 3 |

| x | f(x) |
|---|---|
| 0.1 | 1.1 |
| 0.01 | 1.01 |
| 0.001 | 1.001 |
| 0.0001 | 1.0001 |
| 0.00001 | 1.00001 |
| 0.000001 | 1.000001 |
| 0.11 | 3 |
| 0.011 | 3 |
| 0.0011 | 3 |
| 0.00011 | 3 |

# Análisis final

Reconocer que

- El análisis estático resulta insuficiente además de no ser correcto
- La tabla de valores finita es totalmente insuficiente para asegurar el valor del límite
- La tabla de valores infinita tampoco basta para asegurar el valor del límite

# Conclusión

- Tener en cuenta que un resultado L será el valor de un límite sí y sólo sí **todas** las sucesiones que tienden a la abscisa, satisfacen que sus imágenes tienden al valor L
- La tabla podría estar mostrando alguna sucesión y sus imágenes pero no todas ellas
- Otras sucesiones convergentes a la abscisa ( no incluidas en la tabla) podrían no cumplir con la tendencia que la tabla sugiere
- La idea propia de limite no siempre funciona para resolver actividades

# Aporte

¿Cómo podemos con la definición formal advertir que si la tabla se construyera evidenciando **una** tendencia, ese hecho no garantiza un resultado para el límite?

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Debería pensarse que los todos los *x* que cumplen $0 < |x - a| < \delta$ conforman el intervalo real $(a-\delta;a+\delta)-\{a\}$ y **una única** sucesión $\{x_n\}$ que esté incluida en él y tienda al punto "*a*" no podrá representar a todos los números reales de él.

- vcolomba@ungs.edu.ar